

Recherche Opérationnelle
R.O.
Partie 2: Programmation Linéaire P.L

Pr. Abdessamad Kamouss

Cycle Ingénieur
ENSAM Casablanca



Summary

PLS - Solution de base

Considérons un PL dans sa forme standard qui sera noté **(PLS=)** :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{Sous les contraintes } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \pm e_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \pm e_2 = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \pm e_m = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \end{cases}$$

- n désigne le nombre de variables de décision $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- m le nombre des contraintes = le nombre de variables d'écart ou d'excédent $e_1, e_2, \ldots, e_m$.
- On obtient donc un système de m équations linéaires à $n' = n + m$ inconnues $(m < n')$: infinité de solutions.



PLS - Solution de base

Définition (Solutions de base)

Une solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n, e_1, e_2, \ldots, e_m)$ vérifiant les m contraintes de **(PLS=)** est dite **solution de base** de **(PLS=)** si au moins $(n' - m)$ de ses variables sont égales à 0.
Les variables fixées à zéro sont appelées variables hors base et les autres variables en base.

Définition (Solutions de base admissible)

Une solution de base dont tout les coordonnées sont non négatives est dite **solution de base admissible** de **(PLS=)**.

PLS - Bases et points extrêmes

- Système linéaire $Ax = b$
- A matrice de dimension $m \times n$ et rang $A = m \leq n$

Base de la matrice A

sous-matrice B de rang m de A (n'est pas unique)

B matrice $m \times m$ avec det $B \neq 0$

Posons $A = (B\ N)$
$Ax = b \Leftrightarrow (B\ N)x = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b$
$\Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

Solution de base associée à B

- $x_N = 0$: variables hors base
- $x_B = B^{-1}b$: variables de base

Problème : comment trouver une matrice B ? et x_B ?

PLS - Bases et points extrêmes

$$\begin{cases} 2x + y + e_1 & = & 8 \\ x + 2y + e_2 & = & 7 \\ y + e_3 & = & 3 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Pour trouver une base, en tenter une...
Par exemple $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\begin{cases} 2x + y + e_1 & = & 8 \\ x + 2y + e_2 & = & 7 \\ y + e_3 & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 & = & 8 - 2x - y \\ e_2 & = & 7 - x - 2y \\ e_3 & = & 3 - y \end{cases}$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$ variables hors base

PLS - Bases et points extrêmes

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$ variables hors base

$$\begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y \\ e_2 = 7 - x - 2y \\ e_3 = 3 - y \end{cases}$$

Pour calculer une solution de base :

- variables hors base $= 0$
- variables de base à calculer (si possible, c'est ok)

PLS - Bases et points extrêmes

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$ variables hors base

$$\begin{cases} e_1 &= 8 - 2x - y \\ e_2 &= 7 - x - 2y \\ e_3 &= 3 - y \end{cases}$$

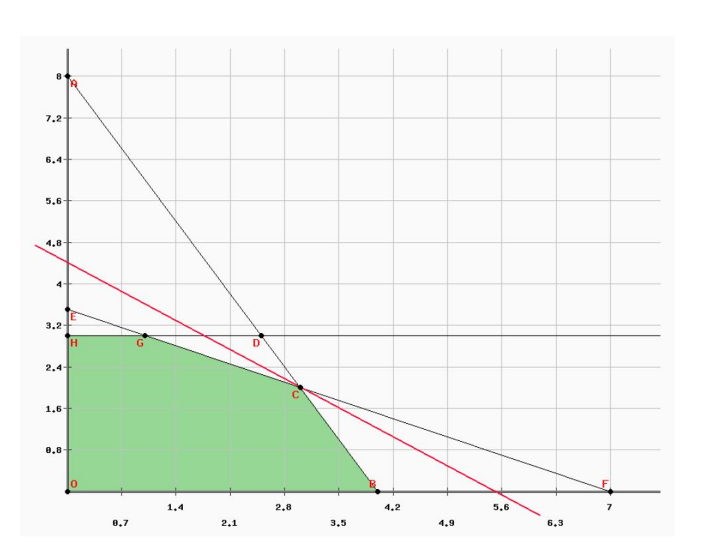
Pour calculer une solution de base :

- variables hors base $= 0$
- variables de base à calculer (si possible, c'est ok)

Pour $x = y = 0$, on trouve :

$$\begin{cases} e_1 &= 8 - 2x - y = 8 \\ e_2 &= 7 - x - 2y = 7 \\ e_3 &= 3 - y = 3 \end{cases}$$

PLS - Bases et points extrêmes



PLS - Bases et points extrêmes

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
\text{s.c.} & 2x & + & y & + & e_1 & & & & & & = & 8 \\
 & x & + & 2y & & & + & e_2 & & & & = & 7 \\
 & & & y & & & & & + & e_3 & & = & 3 \\
 & x, & & y, & & e_1, & & e_2, & & e_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

x	y	e_1	e_2	e_3	sol de base	admiss.	pt extrême
0	0	8	7	3	✔	✔	(0,0)
0	8	0	-9	-5	✔	✘	
0	3.5	4.5	0	-0.5	✔	✘	
0	3	5	1	0	✔	✔	(0,3)
4	0	0	3	3	✔	✔	(4,0)
7	0	-6	0	3	✔	✘	
	0			0	✘	✘	
3	2	0	0	1	✔	✔	(3,2)
2.5	3	0	-1.5	0	✔	✘	
1	3	3	0	0	✔	✔	(1,3)

$\{$**points extrêmes**$\} \Longleftrightarrow \{$**solutions de base admissibles**$\}$

PLS - Bases et points extrêmes

- $Ax = b,\ x \geq 0$ où $A = (B\ \ N)$
- $(x_B\ \ 0)$ est est une solution de base admissible si $x_B \geq 0$
- Equivalence points de vue géométrique / algébrique : L'ensemble des points extrêmes du polyèdre sont les solutions de base admissibles du syst. lin.
- Nombre de points extrêmes (maximum) : $\binom{n}{m}$
- Solutions de base dégénérés : lorsque certaines variables de base sont nulles
- Pratique : lorsque A est inversible, solution de base unique.

PLS - Bases et points extrêmes

Base voisine et pivotage

Bases voisines

Deux sommets voisins correspondent à deux bases B et B' telles qu'on remplace une variable de B pour obtenir B'

- passer à un sommet voisin = changer de base (base voisine)

principe du pivotage

PLS - Bases et points extrêmes

Qui faire entrer dans la base ?

Essayons avec y : quelle est la valeur max que pourra avoir y ?

- $e_1 = 8 - 2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 8$
- $e_2 = 7 - x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3.5$
- $e_3 = 3 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3$

Bilan : $y_{\max} = 3$, pour $y = y_{\max}$ on a $e_1 = 5 - 2x$, $e_2 = 1 - x$, et $e_3 = 0$

▶ candidat pour une nouvelle base :
$\{e_1, e_2, e_3\} \cup \{y\} \setminus \{e_3\} = \{e_1, e_2, y\}$

$(x, y, e_1, e_2, e_3) = (0, 3, 5, 1, 0)$

Simplexe-introduction

Vers un algorithme de résolution

Méthode de résolution "naïve" :

énumérer tous les sommets, calculer la fonction objective sur ces points, prendre le sommet pour lequel cette fonction est optimisée :

- nombre fini de sommets : fonctionne
- lorsque ce nombre est très grand (le cas rencontré en général) : limitation

L'algorithme du simplexe (G. B. Dantzig 1947) :

Algorithme itératif permettant de résoudre un problème de programmation linéaire.

L'algorithme du simplexe évite le plus souvent l'énumération exhaustive des solutions de base admissibles.

Simplexe

Algorithme du simplexe

- Dantzig, 1947
- Algo itératif de résolution de problème de programmation linéaire

Principe

A partir d'un sommet, chercher un sommet voisin qui améliore l'objectif.

Propriété du problème

Soit x_0 sommet non optimum. Alors il existe x, un sommet voisin de x0, tel que $f(x) > f(x_0)$.

Donc ça marche...

Simplexe - illustration

$$\begin{array}{lrcl} Max & z & = & 4x + 5y \\ & 2x + y & \leq & 8 \\ & x + 2y & \leq & 7 \\ & y & \leq & 3 \\ & x, y & \geq & 0 \end{array}$$

A suivre sur votre graphique...

$x_0 = (0, 0)$ d'où $z = 0$

Simplexe - illustration

$$
\begin{array}{lrcl}
Max & z & = & 4x + 5y \\
 & 2x + y & \leq & 8 \\
 & x + 2y & \leq & 7 \\
 & y & \leq & 3 \\
 & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

A suivre sur votre graphique...

$x_0 = (0, 0)$ d'où $z = 0$

$x_1 = (0, 3)$ d'où $z = 15$

Simplexe - illustration

$$\begin{array}{lrcl} Max & z & = & 4x+5y \\ & 2x+y & \leq & 8 \\ & x+2y & \leq & 7 \\ & y & \leq & 3 \\ & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

A suivre sur votre graphique...

$x_0 = (0,0)$ d'où $z = 0$
$x_1 = (0,3)$ d'où $z = 15$
$x_2 = (1,3)$ d'où $z = 19$

Simplexe - illustration

$$\begin{array}{rrcl} Max & z & = & 4x+5y \\ & 2x+y & \leq & 8 \\ & x+2y & \leq & 7 \\ & y & \leq & 3 \\ & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

A suivre sur votre graphique...

$x_0 = (0,0)$ d'où $z = 0$
$x_1 = (0,3)$ d'où $z = 15$
$x_2 = (1,3)$ d'où $z = 19$
$x_3 = (3,2)$ d'où $z = 22$

Algorithme du simplexe par l'exemple

$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{Maximizer } z & = & 4x+5y \\ 2x+y & \leq & 8 \\ x+2y & \leq & 7 \\ y & \leq & 3 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \text{Maximizer } z & = & 4x+5y \\ 2x+y+e_1 & = & 8 \\ x+2y+e_2 & = & 7 \\ y+e_3 & = & 3 \\ x,y,e_1,e_2,e_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Algorithme du simplexe par l'exemple

$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{Maximizer } z & = & 4x+5y \\ 2x+y & \leq & 8 \\ x+2y & \leq & 7 \\ y & \leq & 3 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \text{Maximizer } z & = & 4x+5y \\ 2x+y+e_1 & = & 8 \\ x+2y+e_2 & = & 7 \\ y+e_3 & = & 3 \\ x,y,e_1,e_2,e_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Pour trouver une base, en tenter une...
Par exemple $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+e_1 & = & 8 \\ x+2y+e_2 & = & 7 \\ y+e_3 & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e_1 & = & 8-2x-y \\ e_2 & = & 7-x-2y \\ e_3 & = & 3-y \end{array}\right.$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$ variables hors base

Algorithme du simplexe par l'exemple

Pour calculer une solution de base :

- variables hors base $= 0$
- variables de base à calculer (si possible, c'est ok)
- Valeur de z

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$: variables hors base

Algorithme du simplexe par l'exemple

Pour calculer une solution de base :

- variables hors base $= 0$
- variables de base à calculer (si possible, c'est ok)
- Valeur de z

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$: variables hors base

$x = y = 0$, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & 8 - 2x - y = 8 \\ e_2 & = & 7 - x - 2y = 7 \\ e_3 & = & 3 - y = 3 \end{array}\right.$$

$$\text{et } z = 4x + 5y = 0$$

Algorithme du simplexe par l'exemple

Regardons bien : $z = 4x + 5y$
On peut faire augmenter z en faisant entrer x ou y dans la base

Essayons y : quelle est la valeur maximale que pourra avoir y ?

$$\left\{ \begin{array}{lcl} e_1 & = & 8 - 2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 8 \\ e_2 & = & 7 - x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3.5 \\ e_3 & = & 3 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3 \end{array} \right.$$

Le max de y est 3, pour $y = 3$, on obtenons
$e_1 = 5 - x$, $e_2 = 1 - x$ et $e_3 = 0$.

Nouvelle base candidate :
$\{e_1, e_2, e_3\} \cup \{y\} \setminus \{e_3\} = \{e_1, e_2, y\}$

Algorithme du simplexe par l'exemple

$$\begin{cases} e_1 &= 8 - 2x - y \\ e_2 &= 7 - x - 2y \\ e_3 &= 3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 &= 5 - 2x + e_3 \\ e_2 &= 1 - x + 2e_3 \\ y &= 3 - e_3 \end{cases}$$

z en fonction des variables hors base :
$z = 4x + 5y = 15 + 4x - 5e_3$

Solution de base associée :
$x = e_3 = 0$

$$\begin{cases} e_1 &= 5 - 2x + e_3 = 5 \\ e_2 &= 1 - x + 2e_3 = 1 \\ y &= 3 - e_3 = 3 \end{cases}$$

et $z = 15$.

Algorithme du simplexe par l'exemple

$$z = 15 + 4x - 5e_3$$

Augmenter encore z ? Faire entrer x

Quelle est la valeur maximale que pourra avoir x ?

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_1 & = & 5 - 2x + e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2.5 \\ e_2 & = & 1 - x + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ y & = & 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow \text{pas de contrainte} \end{array} \right.$$

Le max de x est 1, et e_2 peut sortir de la base

Nouvelle base candidate : $\{e_1, x, y\}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_1 & = & 3 + 2e_2 - 3e_3 \\ x & = & 1 - e_2 + 2e_3 \\ y & = & 3 - e_3 \\ z & = & 19 - 4e_2 + 3e_3 \end{array} \right.$$

Algorithme du simplexe par l'exemple

$$z = 19 - 4e_2 + 3e_3$$

Augmenter encore z ? Faire entrer e_3

Quelle est la valeur maximale que pourra avoir e_3 ?

$$\begin{cases} e_1 & = & 3 + 2e_2 - 3e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 1 \\ x & = & 1 - e_2 + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow \text{pas de contrainte} \\ y & = & 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 3 \end{cases}$$

Le max de e_3 est 1, et e_1 peut sortir de la base

Nouvelle base candidate : $\{e_3, x, y\}$

$$\begin{cases} e_3 & = & 1 + 2/3e_2 - 1/3e_1 \\ x & = & 3 + 1/3e_2 + 2/3e_1 \\ y & = & 2 - 2/3e_2 + 1/3e_1 \\ z & = & 22 - 2e_2 - e_1 \end{cases}$$

Algorithme du simplexe par l'exemple

$$z = 22 - 2e_2 - e_1$$

donc $z^* \leq 22$

Or la solution de base $x = 3$, $y = 2$ et $e_3 = 1$ permet d'obtenir le max $z = 22$

Donc on a trouvé l'optimum